

无风浪何起？

[主页](#) | [博客](#) | [相册](#) | [个人档案](#) | [好友](#)

查看文章

为什么要进行傅立叶变换？傅立叶变换有何意义？

2008年05月13日 星期二 09:59

-----傅立叶变换的由来

关于傅立叶变换，无论是书本还是在网上可以很容易找到关于傅立叶变换的描述，但是大都是些故弄玄虚的文章，太过抽象，尽是一些让人看了就望而生畏的公式的罗列，让人很难能够从感性上得到理解，最近，我偶尔从网上看到一个关于数字信号处理的电子书籍，是一个叫Steven W. Smith, Ph.D.外国人写的，写得非常浅显，里面有七章由浅入深地专门讲述关于离散信号的傅立叶变换，虽然是英文文档，我还是硬着头皮看完了有关傅立叶变换的有关内容，看了有茅塞顿开的感觉，在此把我从中得到的理解拿出来跟大家分享，希望很多被傅立叶变换迷惑的朋友能够得到一点启发，这电子书籍是免费的，有兴趣的朋友也可以从网上下载下来看一下，URL地址是：

<http://www.dspguide.com/pdfbook.htm>

要理解傅立叶变换，确实需要一定的耐心，别一下子想着傅立叶变换是怎么变换的，当然，也需要定的高等数学基础，最基本的是级数变换，其中傅立叶级数变换是傅立叶变换的基础公式。

一、傅立叶变换的提出

让我们先看看为什么会有傅立叶变换？傅立叶是一位法国数学家和物理学家的名字，英语原名是Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830), Fourier对热传递很感兴趣，于1807年在法国科学学会上发表了一篇论文，运用正弦曲线来描述温度分布，论文里有个在当时具有争议性的决断：任何连续周期信号可以由一组适当的正弦曲线组合而成。当时审查这个论文的人，其中有两位是历史上著名的数学家拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)和拉普拉斯(Pierre Simon de Laplace, 1749-1827)，当拉普拉斯和其它审查者投票通过并要发表这个论文时，拉格朗日坚决反对，在近50年的时间里，拉格朗日坚持认为傅立叶的方法无法表示带有棱角的信号，如在方波中出现非连续变化斜率。法国科学学会屈服于拉格朗日的威望，拒绝了傅立叶的工作，幸运的是，傅立叶还有其它事情可忙，他参加了政治运动，随拿破仑远征埃及，法国大革命后因会被推上断头台而一直在逃避。直到拉格朗日死后15年这个论文才被发表出来。

谁是对的呢？拉格朗日是对的：正弦曲线无法组合成一个带有棱角的信号。但是，我们可以用正弦曲线来非常逼近地表示它，逼近到两种表示方法不存在能量差别，基于此，傅立叶是对的。

为什么我们要用正弦曲线来代替原来的曲线呢？如我们也还可以用方波或三角波来代替呀，分解信

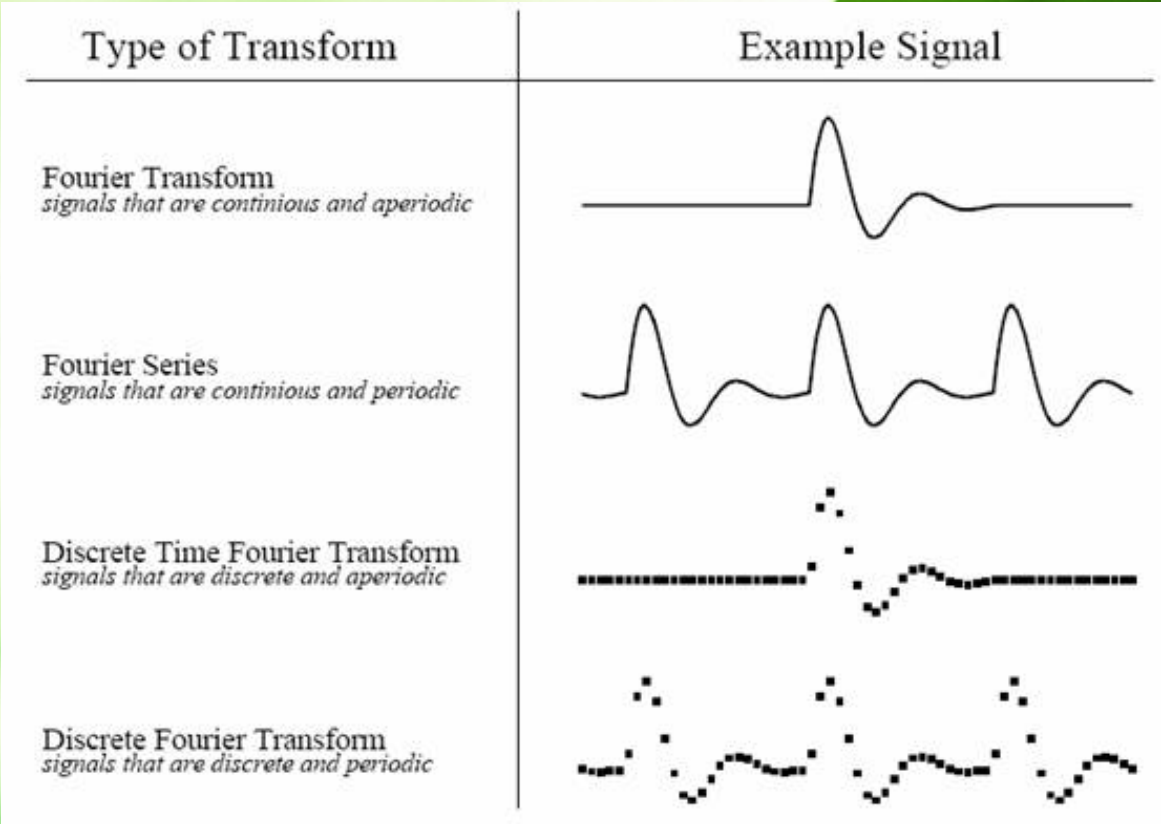
号的方法是无穷的，但分解信号的目的是为了更加简单地处理原来的信号。用正余弦来表示原信号会更加简单，因为正余弦拥有原信号所不具有的性质：正弦曲线保真度。一个正弦曲线信号输入后，输出的仍是正弦曲线，只有幅度和相位可能发生变化，但是频率和波的形状仍是一样的。且只有正弦曲线才拥有这样的性质，正因如此我们才不用方波或三角波来表示。

二、傅立叶变换分类

根据原信号的不同类型，我们可以把傅立叶变换分为四种类别：

1	非周期性连续信号	傅立叶变换（Fourier Transform）
2	周期性连续信号	傅立叶级数(Fourier Series)
3	非周期性离散信号	离散时域傅立叶变换（Discrete Time Fourier Transform）
4	周期性离散信号	离散傅立叶变换(Discrete Fourier Transform)

下图是四种原信号图例：



这四种傅立叶变换都是针对正无穷大和负无穷大的信号，即信号的的长度是无穷大的，我们知道这对于计算机处理来说是不可能的，那么有没有针对长度有限的傅立叶变换呢？没有。因为正余弦波被定义成从负无穷小到正无穷大，我们无法把一个长度无限的信号组合成长度有限的信号。面对这种困难，方法是把长度有限的信号表示成长度无限的信号，可以把信号无限地从左右进行延伸，延伸的部分用零来表示，这样，这个信号就可以被看成是非周期性离散信号，我们就可以用到离散时域傅立叶变换的方法。还有，也可以把信号用复制的方法进行延伸，这样信号就变成了周期性离散信号，这时我们就可以用离散傅立叶变换方法进行变换。这里我们要学的是离散信号，对于连续信号我们不作讨论，因为计算机只能处理离散的数值信号，我们的最终目的是运用计算机来处理信号的。

但是对于非周期性的信号，我们需要用无穷多不同频率的正弦曲线来表示，这对于计算机来说是不可能实现的。所以对于离散信号的变换只有离散傅立叶变换（DFT）才能被适用，对于计算机来说只有离散的和有限长度的数据才能被处理，对于其它的变换类型只有在数学演算中才能用到，在计算机面前我们只能用DFT方法，后面我们要理解的也正是DFT方法。这里要理解的是我们使用周期性的信号目的是为了能够用数学方法来解决，至于考虑周期性信号是从哪里得到或怎样得到是无意义的。

每种傅立叶变换都分成实数和复数两种方法，对于实数方法是最好理解的，但是复数方法就相对复杂许多了，需要懂得有关复数的理论知识，不过，如果理解了实数离散傅立叶变换(real DFT)，再去理解

复数傅立叶就更简单了，所以我们先把复数的傅立叶放到一边去，先来理解实数傅立叶变换，在后面我们会先讲讲关于复数的基本理论，然后在理解了实数傅立叶变换的基础上再来理解复数傅立叶变换。

还有，这里我们所要说的变换(transform)虽然是数学意义上的变换，但跟函数变换是不同的，函数变换是符合一一映射准则的，对于离散数字信号处理（DSP），有许多的变换：傅立叶变换、拉普拉斯变换、Z变换、希尔伯特变换、离散余弦变换等，这些都扩展了函数变换的定义，允许输入和输出有多种的值，简单地说变换就是把一堆的数据变成另一堆的数据的方法。

三、一个关于实数离散傅立叶变换(Real DFT)的例子

先来看一个变换实例，下图是一个原始信号图像：

这个信号的长度是16，于是可以把这个信号分解9个余弦波和9个正弦波（一个长度为N的信号可以分解成 $N/2+1$ 个正余弦信号，这是为什么呢？结合下面的18个正余弦图,我想从计算机处理精度上就不难理解，一个长度为N的信号，最多只能有 $N/2+1$ 个不同频率，再多的频率就超过了计算机所能所处理的精度范围），如下图：

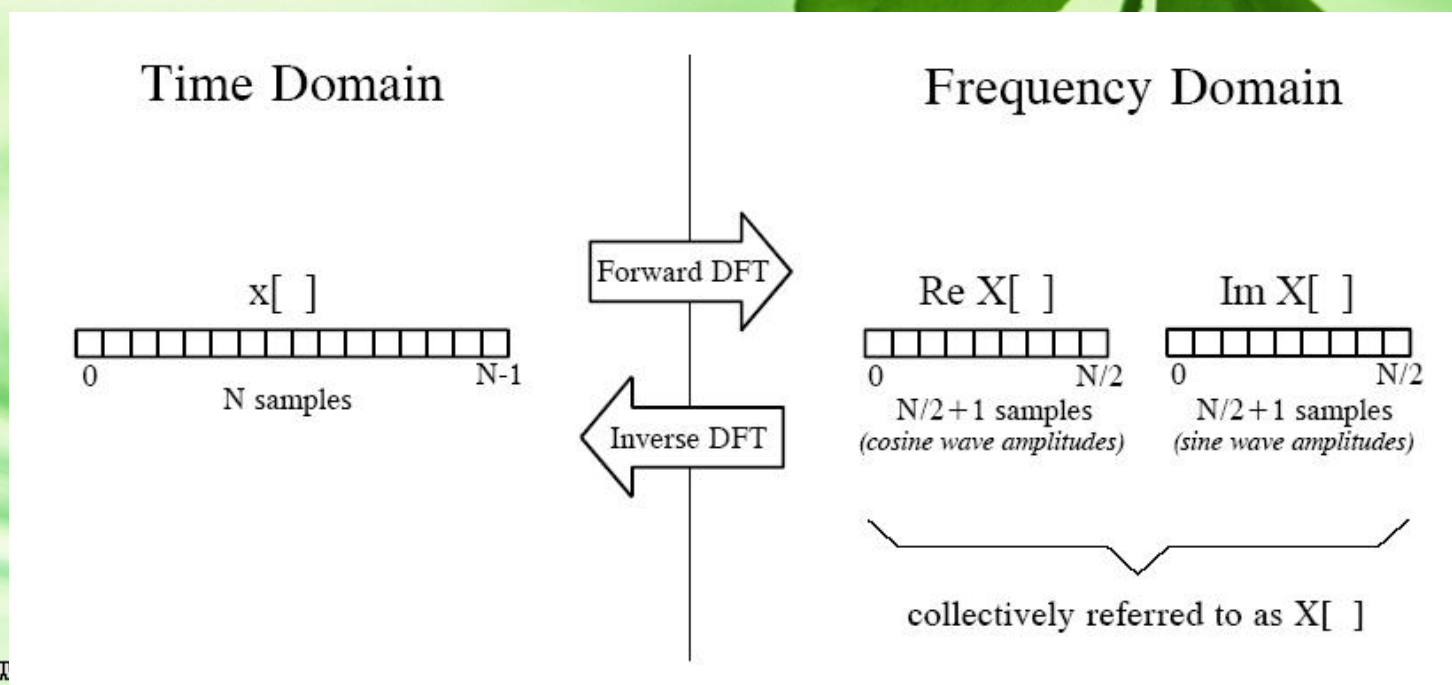
9个余弦信号：

9个正弦信号：

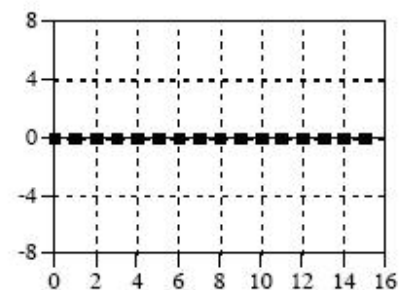
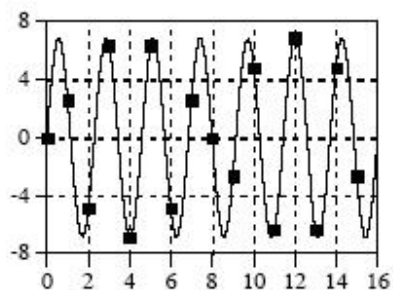
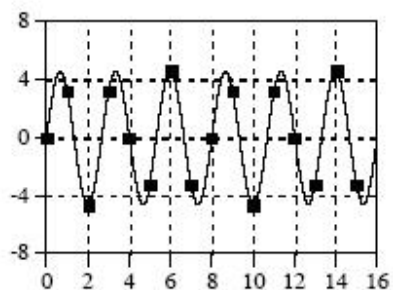
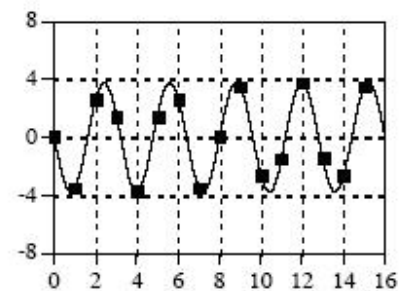
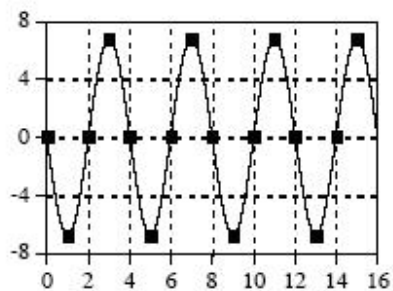
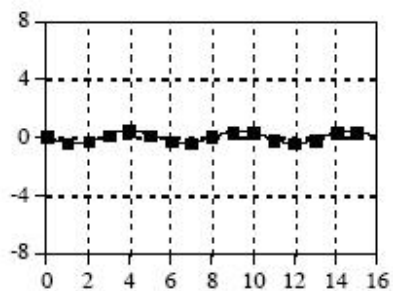
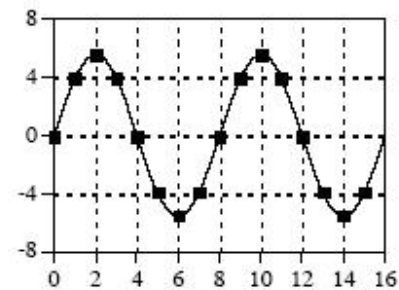
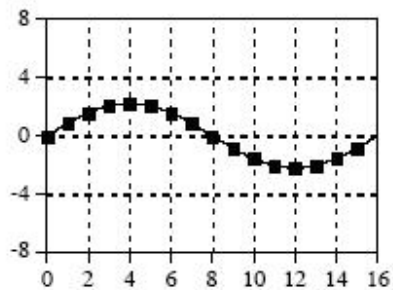
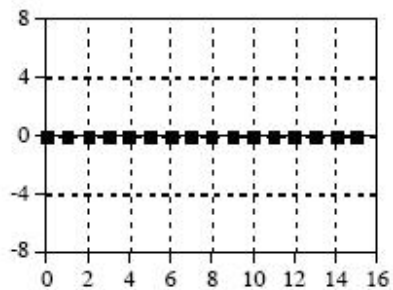
把以上所有信号相加即可得到原始信号，至于是怎么分别变换出9种不同频率信号的，我们先不急，先看看对于以上的变换结果，在程序中又是该怎么表示的，我们可以看看下面这个示例图：

上图中左边表示时域中的信号，右边是频域信号表示方法，从左向右表示正向转换(Forward DFT)，从右向左表示逆向转换(Inverse DFT)，用小写 $x[]$ 表示信号在每个时间点上的幅度值数组,用大写 $X[]$ 表示每种频率的副度值数组,因为有 $N/2+1$ 种频率，所以该数组长度为 $N/2+1$ ， $X[]$ 数组又分两种，一种是表示余弦波的不同频率幅度值： $\text{Re } X[]$ ，另一种是表示正弦波的不同频率幅度值： $\text{Im } X[]$ ，Re是实数(Real)的意思，Im是虚数(Imagine)的意思，采用复数的表示方法把正余弦波组合起来进行表示，但这里我们不考虑复数的其它作用，只记住是一种组合方法而已，目的是为了便于表达（在后面我们会知道，复数形式的傅立叶变换长度是N，而不是 $N/2+1$ ）。

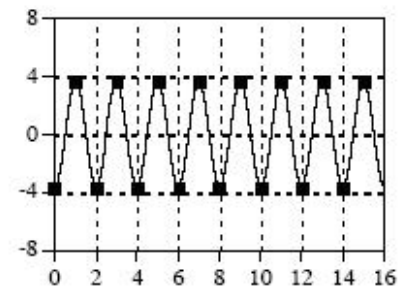
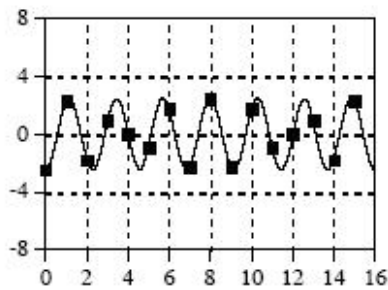
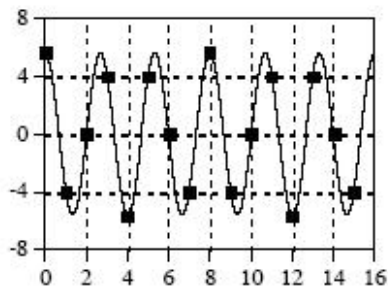
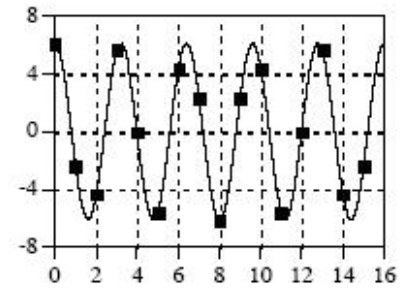
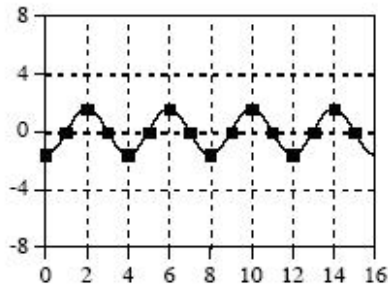
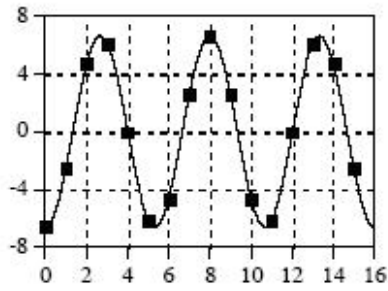
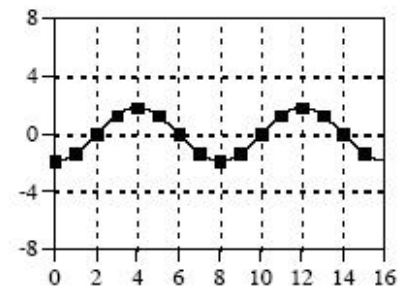
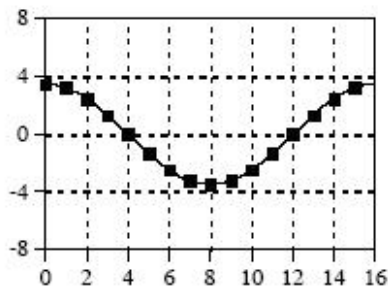
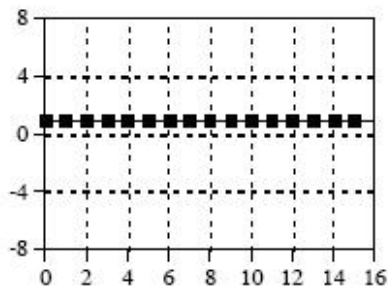
下一节我们将来看一下实数傅立叶变换的具体方法。



Sine Waves



Cosine Waves



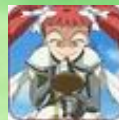
类别：[Science Problem](#) | [添加到收藏](#) | 浏览(90) | [评论](#) (6)

上一篇：[matlab效果图！](#) 下一篇：[《HP大中华区总裁孙振耀退休感言...](#)

最近读者：



登录后，
您就出现
在这里。



[mshua001](#) [yxyrudo](#) [eforce042](#)

网友评论：

1



[floyd1254](#)

2008年05月13日 星期二 14:55

a.有人是这样说的：我们先从它的原理说起，傅立叶原理表明：任何连续测量的时序或信号，都可以表示为不同频率的正弦波信号的无限叠加。而根据该原理创立的傅立叶变换算法利用直接测量到的原始信号，以累加方式来计算该信号中不同正弦波信号的频率、振幅和相位。和傅立叶变换算法对应的是反傅立叶变换算法。该反变换从本质上说也是一种累加处理，这样就可以将单独改变的正弦波信号转换成一个信号。

b.也有人这样说：我的理解是这样的。

1.连续的周期信号是由一系列的正弦波组成,他的频谱是离散的,连续的非周期信号的频谱是连续的.频谱的幅度实际上就是反映了每个正弦波的幅度.

2.关键是离散的信号,如何用数字方法实现.即得到离散的有限信号(AD采样),然后在得到频谱.

首先用冲击信号采样,得到有限的离散信号,无限的计算机可处理不了,这里还涉及到采样定理,只有当采样频率高于2倍的

被采信号,才能使得频域的周期频谱不发生混叠.不过2倍只是频谱不混叠,能量(例如有效值)还是要多采点才能反映真实的情况.

c.还有人这样说：（by Element）最近数字图象处理已经学到疯了，也正好游戏中可能会用到，好不容易找到一篇有建设性的文章，顺便贴在这里了，希望风亲不要介意

2



[floyd1254](#)

2008年05月13日 星期二 14:56

（一）傅立叶变换的物理意义

傅立叶变换是数字信号处理领域一种很重要的算法。但是该算法到底有何意义呢？

要知道傅立叶变换算法的意义，首先要了解傅立叶原理的意义。傅立叶原理表明：任何连续测量的时序或信号，都可以表示为不同频率的正弦波信号的无限叠加。而根据该原理创立的傅立叶变换算法利用直接测量到的原始信号，以累加方式来计算该信号中不同正弦波信号的频率、振幅和相位。

和傅立叶变换算法对应的是反傅立叶变换算法。该反变换从本质上说也是一种累加处理，这样就可以将单独改变的正弦波信号转换成一个信号。

因此，可以说，傅立叶变换将原来难以处理的时域信号转换成了易于分析的频域信号（信号的频谱），可以利用一些工具对这些频域信号进行处理、加工。最后还可以利用傅立叶反变换将这些频域信号转换成时域信号。

从现代数学的眼光来看，傅里叶变换是一种特殊的积分变换。它能将满足一定条件的某个函数表示成正弦基函数的线性组合或者积分。在不同的研究领域，傅里叶变换具有多种不同的变体形式，如连续傅里叶变换和离散傅里叶变换。

傅立叶变换属于调和分析的内容。"分析"二字，可以解释为深入的研究。从字面上来看，"分析"二字，实际

3



[floyd1254](#)

2008年05月13日 星期二 14:57

在数学领域，也是这样，尽管最初傅立叶分析是作为热过程的解析分析的工具，但是其思想方法仍然具有典型的还原论和分析主义的特征。"任意"的函数通过一定的分解，都能够表示为正弦函数的线性组合的形式，而正弦函数在物理上是被充分研究而相对简单的函数类，这一想法跟化学上的原子论想法何其相似！奇妙的是,现代数学发现傅立叶变换具有非常好的性质,使得它如此的好用和有用,让人不得不感叹造物的神奇:

1. 傅立叶变换是线性算子,若赋予适当的范数,它还是酉算子;
2. 傅立叶变换的逆变换容易求出,而且形式与正变换非常类似;
3. 正弦基函数是微分运算的本征函数,从而使得线性微分方程的求解可以转化为常系数的代数方程的求解.在线性时不变的物理系统内,频率是个不变的性质,从而系统对于复杂激励的响应可以通过组合其对不同频率正弦信号的响应来获取;
4. 著名的卷积定理指出:傅立叶变换可以化复杂的卷积运算为简单的乘积运算,从而提供了计算卷积的一种简单手段;
5. 离散形式的傅立叶变换可以利用数字计算机快速的算出(其算法称为快速傅立叶变换算法(FFT)).

正是由于上述的良好性质,傅里叶变换在物理学、数论、组合数学、信号处理、概率、统计、密码学、声学、

www.wallcool.com

4



[floyd1254](#)

2008年05月13日 星期二 14:58

光学等领域都有着广泛的应用。

在图象处理上的应用

傅立叶变换是图像处理中最常用的变换。它是进行图像处理和有力工具。

傅立叶变换的数学定义

传统的傅立叶变换是一种纯频域分析，它可将一般函数 $f(x)$ 表示为一簇标准函数的加权求和，而权函数亦即 f 的傅立叶变换。设 f 是 R 上的实值或复值函数，则 f 为一能量有限的模拟信号，具体定义如下：

2、图像傅立叶变换的物理意义

图像的频率是表征图像中灰度变化剧烈程度的指标，是灰度在平面空间上的梯度。如：大面积的沙漠在图像中是一片灰度变化缓慢的区域，对应的频率值很低；而对于地表属性变换剧烈的边缘区域在图像中是一片灰度变化剧烈的区域，对应的频率值较高。傅立叶变换在实际中有非常明显的物理意义，设 f 是一个能量有限的模拟信号，则其傅立叶变换就表示 f 的谱。从纯粹的数学意义上看，傅立叶变换是将一个函数转换为一系列周期函数来处理的。从物理效果看，傅立叶变换是将图像从空间域转换到频率域，其逆变换是将图像从频率域转换到空间域。换句话说，傅立叶变换的物理意义是将图像的灰度分布函数变换为图像的频率分布函数，傅立叶逆变换是将图像的频率分布函数变换为灰度分布函数。

不过其目的

5



[floyd1254](#)

2008年05月13日 星期二 15:40

本文章图片太多，不太好贴上来。另外还有三篇，有需要的我可以传给你！

或者自己到这里下载原文：<http://download.csdn.net/source/444234>

6

匿名网友

2008年05月15日 星期四 21:23

顶，分析的真好。

发表评论：

姓 名：

[注册](#) | [登录](#)

网址或邮箱：

(选填)

内 容：

验证码：

www.wallc00.com

请输入下图中的四位验证码，字母不区分大小写。

[看不清？](#)

3KKK

